

RECENSIONI E PRAFAZIONI

Godino, J. D. (2024). *Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática: Fundamentos, Herramientas y Aplicaciones.*

Recensione di Bruno D'Amore

Premessa

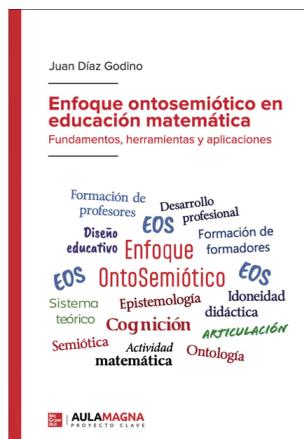
Ho avuto la fortuna di ricevere questo libro prima della sua pubblicazione ufficiale e definitiva, quando il collega e amico Juan G. lo inviò ad alcuni ricercatori che avevano negli anni dato contributi allo sviluppo della sua creazione scientifica, l'EOS. Letto con attenzione totale d'un fiato e apprezzato per la sua portata senza limiti, nonostante la mole enorme, lo ricevo di nuovo a distanza di mesi, pubblicato in forma definitiva, elegante, ricco. Basta leggere l'indice per capire che siamo di fronte a una bomba culturale di potenza straordinaria. Ma bisogna con attenzione leggere le pagine a una a una ...

Juan appartiene al ristretto gruppo di coloro che hanno saputo creare teorie significative, profonde, dalla portata enorme, tali da reindirizzare la ricerca nel nostro campo, quello della Didattica della matematica, su binari nuovi, potenti, significativi, con una visione che si apre su numerosi fronti. Ricordo di aver avuto parte non banale sia nel far conoscere (parecchi decenni fa, almeno 5) la Teoria delle situazioni di Guy Brousseau, e poi di favorire in tutti i modi possibili lo studio teorico e concreto della Teoria della oggettivazione di Luis Radford, almeno da 25 anni, creando numerose occasioni di confronti teorici e di divulgazione, per esempio invitando Luis in Italia ai frequentatissimi convegni da me diretti dal 1986 e in Svizzera (favorendo un celebre incontro di discussione fra lui stesso e Brousseau, che si protrasse ore).

Ora, in questo 2024, credo si possa affermare che sono ben oltre una ventina le teorie significative della Didattica della matematica, quelle di cui ha senso parlare; ho suggerito ai miei migliori allievi di dedicarsi all'impresa di presentarle al pubblico dei giovani ricercatori, già che mi rendo conto che le nuove teorie tendono a far ... dimenticare le vecchie (Asenova et al., 2022).

La collaborazione con Juan è sempre stata profondissima e ricca; a partire da decenni fa ... non ricordo più quando ... Ma nel 2006, quando Luis Radford e io fummo editors di un numero speciale della rivista *Relime* (Messico), decidemmo di comune accordo di chiedere a Juan uno degli articoli (Radford & D'Amore, 2006).

Nel 2005 avevo avuto modo di fermarmi a Granada con Martha Isabel Fandiño Pinilla, ospiti di Juan e di Carmen Batanero, per una serie di attività di grande interesse comune; ma c'era stato qualche anno prima un formidabile incontro a Chivilcoy (Argentina), nel 2003, durante il quale Martha e io avevamo favorito uno scambio di opinioni orali fra Guy e Juan; per esempio,



durante un lungo viaggio in bus, i due si erano affrontati (sì, è proprio il caso di dirlo) sul piano teorico e la mia funzione di traduttore non era stata banale (Brousseau parlava sì spagnolo, ma non sempre in maniera del tutto comprensibile). [Va detto che, prima del Covid, si facevano incontri veri, con viaggi, hotel, pasti in comune, formidabili occasioni di scambio personale; il che oramai è raro assai, sempre più raro. Molte volte Juan è venuto a Bogotá per lavorare al nostro fianco, per esempio in occasione di prove finali di dottorato, approfittando per scambiare idee, fare seminari e preparare testi].

A partire dai primi anni 2000, con Juan e talvolta con altri autori, fra i quali Vicenç Font e Martha, scrivemmo vari articoli destinati ad approfondire l'analisi critica del potere della teoria o a farla conoscere a studiosi di altri Paesi; questa attività durò vari anni, anzi: non è mai terminata. Per far ciò erano necessarie riunioni di approfondimento, tra le quali ricordo quella a Santiago di Compostela (2006), noi quattro autori impegnati lì per tesi di dottorato come esperti.

A proposito di tesi, in occasione della discussione del lavoro di uno dei miei migliori allievi dottorali, George Richard Paul Santi, nel marzo 2010 invitai a fare da relatori a Palermo (Italia) sia Juan sia Luis e fu un'occasione fantastica di discussione e approfondimento. Così come il convegno di Santa Marta (Colombia), indetto dalla università la Sabana di Chia, in occasione del quale si pubblicarono Atti molto significativi per i quali chiedemmo un contributo a Juan e ad altri amici (per esempio: Brousseau, Arzarello, Cantoral, Duval, Font, Godino, Llinares, Gagatsis, ...).

Altre occasioni di contatto in convegni furono più volte a Luján (Argentina, per esempio nel 2021); a Bologna in occasione di un convegno internazionale che si tenne in mio onore nel 2011 (Sbaragli, 2011); un convegno virtuale a Granada nel 2017, nel quale Martha e io presentammo un'analisi approfondita di alcuni aspetti della EOS che ci appaiono tenuti in considerazione in questo ultimo fantastico libro di Juan; e altri. Moltissimi lavori di Juan sulla EOS sono stati da noi tradotti in italiano, già che la teoria EOS faticava un po' a entrare fra i ricercatori di quella nazione. E infine ricordo un libro scritto da Juan, Martha e da me, pubblicato in italiano nel 2003 e poi in spagnolo in Colombia nel 2008 (D'Amore, Godino, & Fandiño Pinilla, 2008).

Potrei proseguire, ma mi fermo qui; tutto quanto precede è scritto per confermare che la collaborazione sulla e lo studio della EOS è sempre stato prepotente e forte fra noi: Juan (che l'ha elaborata) e noi che ci abbiamo creduto e che abbiamo contribuito nell'analisi critica e nella diffusione.

Così che risulta ora chiaro che, quando abbiamo visto l'indice di questo libro e letto la prima versione, il nostro cuore ha palpitato; non ci sembrava fosse possibile entrare in maggiori e più profondi dettagli di quella che consideriamo una delle teorie più complete e affascinanti dell'intero panorama di ricerca in Didattica della Matematica. Eppure, così è: questo libro di molto approfondisce

il lavoro di decenni precedenti proponendo estensioni e analisi inattesi, ma necessari.

A delineare alcuni punti fondamentali di tale teoria, dedicheremo le seguenti pagine, che vanno interpretate come contributo alla diffusione del EOS e come specifico orientamento alla lettura di questo nuovo, potente, profondo, dotto libro.

Cenni generali alla EOS

Da:

Asenova, M., & D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I., & Fúneme Mateus, C. C., & Iori, M., & Santi, G. (2022). *Teorie rilevanti in Didattica della matematica*. Bologna: Bonomo. [Versión en idioma español: (2024). *Teorías relevantes en Educación Matemática*. Prólogo de Rodolfo Vergel. Bogotá: Magisterio].

Con l'accesa discussione sull'insegnamento e l'apprendimento della Matematica negli anni '80, sono nate diverse teorie che hanno affrontato aspetti assai diversi della Didattica della matematica, talmente diversi che apparentemente le differenze epistemologiche e ontologiche assunte da ciascuna le rendevano distanti e inconciliabili. Tuttavia, in Spagna, Godino e Batanero (1994) trovano nella nozione di *significado* un punto di convergenza tra le tante posizioni dell'epoca.

Per Godino e Batanero (1994) l'idea di significato è centrale nella Didattica della Matematica perché è direttamente correlata al problema della comprensione che gli studenti raggiungono degli oggetti matematici. In risposta a ciò, l'Approccio ontosemiotico (EOS) è emerso come un sistema teorico che trova nella posizione pragmatica del significato (Peirce, 1958) un'opportunità di precisione concettuale che, legata ai concetti di pratica e oggetto matematico, consente una descrizione dettagliata dell'insegnamento e dell'apprendimento della Matematica che è compatibile con molteplici teorie sviluppate in questo campo.

La EOS parte dalla definizione di pratica come qualsiasi «azione o manifestazione (linguistica e non) compiuta da qualcuno per risolvere problemi matematici, comunicare la soluzione ad altri, validare la soluzione e generalizzarla ad altri contesti e problemi» (Godino & Batanero, 1994, p. 334). Quel “qualcuno” che sviluppa una pratica matematica può essere una persona o un'istituzione, intendendo quest'ultima come un gruppo di persone impegnate a risolvere un problema. In questo modo, viene dato un ruolo principale al problem solving considerandolo come l'attività che fa emergere significativamente la conoscenza matematica, aggiungendo così una visione antropologica agli approcci teorici in Didattica della Matematica.

Per quanto riguarda gli oggetti matematici, essi sono intesi come entità astratte, cariche di aspetti culturali che emergono con ruoli rappresentativi, strumentali, regolativi, esplicativi e giustificativi nelle pratiche matematiche (D'Amore & Godino, 2007), il che implica che essi abbiano componenti

personali e rivelino un dualismo istituzionale. Un oggetto matematico personale è l'emergere del sistema di pratiche personali che un soggetto sperimenta durante il suo processo di apprendimento; mentre l'oggetto istituzionale ha un carattere sociale che corrisponde all'ambito dei problemi in cui è accolto e proposto da un'istituzione (Godino & Batanero, 1994). In tal modo il significato è definito come la corrispondenza che si stabilisce tra un oggetto matematico e il sistema di pratiche in cui esso emerge e del quale fa parte.

Un altro aspetto che l'EOS evidenzia è che la natura culturale delle pratiche matematiche porta con sé la necessità di usare il linguaggio come un mezzo che ci permette di comunicare con gli altri; così che, nell'attività matematica, i processi di interpretazione sono essenziali, intendendo la nozione di funzione semiotica come quel rapporto di dipendenza tra i vari oggetti che emergono e regolano le pratiche matematiche, che consente la modellazione e la descrizione della conoscenza personale e istituzionale degli oggetti matematici.

Proprio in vista della ricerca della modellizzazione delle pratiche matematiche, nell'EOS viene proposta la nozione di processo matematico come sequenza di azioni che si sviluppano nel corso della risoluzione di un problema (Font & Rubio, 2016). La relazione dinamica che si instaura tra oggetti matematici e significati attraverso i processi che si sviluppano in una pratica matematica ci porta a concepire l'apprendimento come l'appropriazione che una persona fa dei significati istituzionali di un oggetto (Godino et al., 2020).

L'applicazione di questa concezione di oggetti, pratiche e significati nell'analisi di specifiche situazioni di apprendimento e insegnamento della matematica ha portato l'EOS a riflettere sulla presenza di ulteriori elementi non riconosciuti in queste dimensioni epistemiche (istituzionali) e cognitive (personali), ampliando le considerazioni del suo sistema teorico con quattro ulteriori sfaccettature: affettiva, mediativa, interazionale ed ecologica. Secondo Godino et al. (2020), grazie a questa estensione, si possono affrontare diverse questioni e considerare diverse componenti della pratica matematica:

- emersione e sviluppo della Matematica (aspetto epistemico), assumendo la visione pragmatica e antropologica precedentemente spiegata;
- i modi di conoscere gli oggetti matematici e che cosa essi significano per un soggetto (aspetto cognitivo), dove la funzione semiotica e la configurazione ontosemiotica (relazioni tra processi, pratiche e oggetti) sono usate per modellare e descrivere pratiche matematiche, oltre che per anticipare i conflitti che uno studente può incontrare;
- il modo di concepire e mettere in relazione insegnamento e apprendimento (aspetto didattico), per il quale la configurazione didattica si propone come strumento di rappresentazione e studio delle relazioni dinamiche fra tre aspetti: (1) le pratiche, gli oggetti e i processi che il docente ritiene necessari per avvicinarsi a un oggetto matematico, (2) il sistema delle funzioni didattiche e i mezzi utilizzati e (3) i fattori cognitivi e affettivi presenti nel processo di apprendimento;

- i fattori e le norme che condizionano, sostengono e regolano le pratiche matematiche (aspetto ecologico), affermando che possono essere di natura sociale o disciplinare e che, attraverso di essi, è possibile riflettere, valutare e modificare le pratiche matematiche per il loro miglioramento;
- le motivazioni, gli interessi, gli atteggiamenti, le credenze e le emozioni sia degli studenti che degli insegnanti (aspetto affettivo), comprendendo che essi inducono e condizionano le pratiche matematiche, motivo per cui sono direttamente correlati al grado di coinvolgimento degli studenti nel processo di insegnamento e apprendimento;
- il tipo di azioni e risorse che dovrebbero essere utilizzate in un processo di insegnamento e apprendimento di uno specifico oggetto matematico (aspetto mediazionale), alludendo all'importanza della disponibilità e dell'uso tempestivo di risorse materiali e temporanee.

Queste sfaccettature che si propongono nell'EOS sono in relazione tra loro e sono destinate a soddisfare le esigenze di descrizione e prescrizione che, secondo Font e Godino (2011), deve affrontare la Didattica della Matematica. Per questo l'EOS, oltre a offrire strumenti di studio per i processi di insegnamento e apprendimento in ogni loro sfaccettatura, offre anche a docenti e ricercatori una serie di criteri che consentono loro di studiare, riflettere, valutare e guidare il miglioramento di tali processi. Questi criteri sono associati a ciascuna delle sfaccettature e si presentano come il risultato di un processo consensuale di riconoscimento dei risultati delle molteplici teorie della Didattica della Matematica, per le quali non sono visti come una guida compiuta o rigida da considerare da parte degli insegnanti, ma si propongono come punto di partenza nella ricerca del consolidamento della Didattica della Matematica come disciplina scientifica ad alto impatto sociale.

È proprio lo studio dei processi di miglioramento dell'apprendimento e dell'insegnamento della Matematica che conduce a uno dei costrutti centrali di EOS, l'idoneità didattica. Per l'EOS, la Didattica della Matematica ha come preoccupazione primaria l'identificazione e lo studio dei problemi e dei fattori che condizionano l'apprendimento della matematica, al fine di fornire soluzioni alternative o migliorative. Per questo propone che, pur non esistendo "classi buone o cattive", sia importante disporre di criteri che permettano di riflettere su ciò che accade in aula e prendere decisioni che portino a pratiche significative per l'apprendimento degli studenti, essendo l'idoneità didattica di un processo di insegnamento e apprendimento lo stato di equilibrio tra i criteri delle sfaccettature di EOS. Questa idoneità è relativa ai fattori contestuali, culturali e storici in cui si inquadrano le pratiche matematiche.

Vogliamo inoltre ricordare, all'interno dell'EOS, i contributi degli ultimi due decenni in relazione alla connessione tra questo sistema teorico e la formazione dell'insegnante di matematica. A questo proposito, l'EOS ha proposto un modello di conoscenze e competenze didattico-matematiche (CCDM) basato su tre dimensioni: (1) didattica, alludendo alle conoscenze degli

insegnanti in relazione alle sei facce dell'EOS precedentemente illustrate; (2) Matematica, corrispondente alla conoscenza della matematica, dei suoi problemi, procedure, oggetti e connessioni; (3) obiettivo didattico-matematico, relativo alla conoscenza delle norme e metanorme dei processi di insegnamento e apprendimento, nonché alla valutazione dell'idoneità didattica (Pino-Fan & Godino, 2015).

Il CCDM si propone come un modello a doppia intenzione: da un lato consente lo studio e la descrizione delle conoscenze degli insegnanti e dall'altro fornisce criteri che consentono di determinare i fattori da considerare nella progettazione dei piani di formazione degli insegnanti. In particolare, propongono l'analisi, la progettazione, l'implementazione e la valutazione dei processi di insegnamento e apprendimento attraverso le sfaccettature e i criteri dell'EOS, come una possibilità di gestione delle competenze professionali dell'insegnante di matematica.

Le possibilità di espansione dell'EOS sono molteplici per la sua disponibilità al dialogo e all'interazione con i progressi di tutte le teorie di Didattica della Matematica, naturalmente discutendo e superando le differenze epistemologiche e ontologiche che esistono.

Riferimenti

- D'Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 191–218.
- Font, V., & Godino, J. D. (2011). Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato. In J. Goñi (Ed.), *Formación del Profesorado. Educación Secundaria* (pp. 9–56). Grao.
- Font, V., & Rubio, N. (2016). Procesos en matemáticas: Una perspectiva ontosemiótica. *La matematica e la sua didattica*, 24(1-2), 97–123.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(2), 3–15.
- Peirce, C. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce. 1931-1935*. Harvard UP.
- Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Revista Paradigma*, 36(1), 87–109.

Questo libro

Visto l'enorme successo internazionale della EOS, ma viste anche le diverse interpretazioni che hanno fatto seguito alla sua diffusione, e le altre teorie che sono state create prima e dopo, notevole è la diffusione internazionale della EOS, tanto che considero necessario questo possente lavoro esplicativo del suo creatore, dettagliato, profondo e critico.

Questo nuovo testo di Juan fa spesso riferimento a teorie che non si situano solo alla base della EOS, il che amplia il suo studio, il suo senso e le sue applicazioni. È estremamente rilevante e significativo che vi siano molti riferimenti ad attività matematiche concrete e di vario genere, con esempi espliciti trattati con dettaglio.

La Matematica è presentata con mille sfaccettature diverse, tutte coerenti, ma tali che ciascuna richiede interpretazioni, linguaggi e modalità distinte, che vengono esplicitati e discussi.

Profondo e assai utile è l'analisi delle diverse teorie del significato e delle loro relazioni con la EOS, in particolare, per quanto riguarda me stesso, gli studi di Peirce.

Estremamente interessanti le analisi relative alla teoria del significato in relazione specifica con la Didattica della Matematica.

Essa, la Didattica della Matematica è presentata, discussa e analizzata da moltissimi punti di vista diversi, che non solo sono esaustivi, ma che finalmente danno della Didattica della Matematica il suo senso molteplice e onnicomprensivo, ciò che molte altre teorie non riescono a dare.

A mio avviso sono interessanti non solo le analogie, ma anche e forse soprattutto le differenze che quasi mai si danno a vedere in analoghe occasioni. Anche in questo caso, gli esempi specifici sono calzanti e molto significativi, soprattutto i paragrafi sui numeri naturali, il concetto di funzione e dunque il linguaggio delle relazioni, cardini della educazione matematica in tutto il mondo.

Molto efficace e necessario il paragrafo che porta il nome di: Approccio ontosemiotico al dominio affettivo in Didattica della Matematica, tematica assente in molte altre opere che trattano temi di carattere didattico, ma qui centrale e significativo.

Nel Capitolo 4 si sviluppa una Teoria del progetto educativo in Matematica basata sulla EOS e si prende in esame, come non ho mai visto fare, con dettagli assai specifici e interessanti, la Dimensione normativa in tutti i suoi specifici aspetti (Norme epistemiche, Norme ecologiche, Norme sulle interazioni, Norme mediazionali, Norme cognitive, Norme affettive, Dimensione metanormativa). In tutto il libro sono presi in esame i Criteri di idoneità didattica e la Dinamica di un processo educativo-istruzionale (nelle sottotraiettorie epistemica, istruzionale, cognitiva e affettiva).

Trovo molto efficaci i paragrafi destinati all'analisi delle Prospettive teoriche relazionate con il progetto, temi allo stesso tempo molto concreti ma anche profondamente teorici e analitici.

Fin dalla nascita della teoria EOS, ricordo vennero messi in evidenza aspetti che sono stati oggetto di discussione e che oggi vengono presentati con notevole profondità e dettaglio, qualcosa che Juan chiama Teoria dell'idoneità didattica basata su vari aspetti (epistemico, ecologico, mediazionale, interazionale,

cognitivo, affettiva), i quali hanno interesse di per sé ma soprattutto per le loro interazioni, tema che occupa un ruolo centrale in questo libro.

Dicevo sopra, e lo ripeto qua, che Juan presenta sempre in profondità le relazioni della EOS con altre teorie su temi centrali, relazioni talvolta di concordanza almeno parziale, ma non sempre.

Molta attenzione presta Juan al docente, alla sua professionalità, alla consapevolezza del suo ruolo e alla sua formazione, tema anche a me caro che ho affrontato in tante occasioni ma che, in questo libro, riesce a essere non solo tema concreto, pratico, reale, ma anche di profondo carattere teorico.

Ho molto apprezzato il capitolo 7, dedicato al sistema teorico che sottende la EOS, di una profondità culturale enorme, sottile, precisa, scientifica. Fino a proporre l'EOS come quadro teorico di ricerca.

Molto attuale è il tema delle relazioni fra teorie diverse, come cito io stesso in molte ricerche degli ultimi 10 anni e come invito i miei allievi a studiare; dunque, ben vengano i paragrafi concernenti le Concordanze e complementarietà con altre teorie che sono le seguenti: Teoria delle situazioni didattiche, Teoria antropologica in Didattica della Matematica, Didattica della matematica realista, Teoria APOS, Teoria dell'oggettivazione, Programma etnomatematico. Juan non solo coglie le differenze, ma anche le analogie, e ciò da due punti di vista: i loro costituenti e le diversità di uso nella pratica didattica.

Paragrafi finali di prestigio culturale ma anche di generosità intellettuale, quelli destinati a Confronto di teorie secondo la dualità comprensione-uso (uno dei temi più cari a Juan, spesso ricorrente) e questioni aperte all'interno del sistema teorico EOS, come strumento non concluso, in perenne evoluzione. Il che testimonia, a mio avviso, la visione critica e autocritica di estrema forza intellettuale di Juan

Riferimenti

- Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Fúneme Mateus, C. C., Iori, M., & Santi, G. (2022). *Teorie rilevanti in Didattica della matematica*. Bonomo. [Versión en idioma español: (2024). *Teorías relevantes en Educación Matemática*. Prólogo de Rodolfo Vergel. Magisterio].
- D'Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 191–218.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (Eds.). (2015). *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y teórica*. Ediciones Universidad De La Sabana.
- D'Amore, B., Godino, J. D., & Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Competencias y matemática*. Magisterio.
- Font, V., & Godino, J. D. (2011). Inicio a la investigación en la enseñanza de las Matemáticas en secundaria y bachillerato. En J. Goñi (Ed.), *Formación del Profesorado. Educación Secundaria* (pp. 9–56). Grao.
- Font, V., & Rubio, N. (2016). Procesos en matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. *La matematica e la sua didattica*, 24(1-2), 97–123.

- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 12(2), 3–15.
- Peirce, C. S. (1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce. 1931-1935*. Harvard UP.
- Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Revista Paradigma*, 36(1), 87–109.
- Radford, L., & D'Amore, B. (Eds.). (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Numero spéciale de la revista *Relime* (Cinvestav, México DF., México).
- Sbaragli, S. (Ed.). (2011). *La matematica e la sua didattica, quarant'anni di impegno. Mathematics and its didactics, forty years of commitment. In occasion of the 65 years of Bruno D'Amore*. Proceedings of International Conference, October 8, 2011. Department of Mathematics, University of Bologna. Pitagora.

Testi di riferimento

- D'Amore, B. (2020). Un estudio del desarrollo de la didáctica de la matemática con los medios teóricos del EOS. En AA. VV. (2020), Memorias del I Simposio de Educación Matemática (I SEM V) “Educación matemática en tiempo de pandemia” (Tomo I, pp. 6–11). Universidad Nacional de Luján, Argentina.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la didáctica de la matemática: Theoretical reflections on the basis of the onto-semiotic approach to didactic of mathematics. In J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del II Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico*. Granada, 23-26 marzo 2017. ISBN: 978-84-617-9047-0. <http://enfouqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2020). Historia del desarrollo de la didáctica de la matemática: Un estudio realizado con los medios teóricos de la EOS (Enfoque Onto-Semiótico). *Paradigma*, 41(1), 130-150.
- Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematical education. *For the learning of mathematics*
- Font V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2010). Representations in mathematics education: an onto-semiotic approach. *International Journal for Studies in Mathematics Education*. 2, 1, 58-86.

Peres, E., & Siminovich, S. (2024). *L'Armonia dei Numeri Primi: Giochi Matematici e Nuove Simmetrie Creative*. Dedalo.

Recensione di Bruno D'Amore

Ricordo ancora nel 2022 l'angoscia di sapere che il caro amico Ennio Peres, esperto numero uno di giochi matematici, che tante volte aveva scritto prefazioni appassionate per i miei libri, che aveva sempre accettato con entusiasmo di parlare ai convegni da me organizzati per i docenti di matematica, complice nell'idea che i giochi matematici potessero essere materiale didattico da portare in aula, come lui faceva da decenni nelle sue lezioni di matematica, ci aveva lasciato.

Fui invitato a scrivere parole di ricordo, “necrologi” come li si chiama, da alcune riviste. Il che ho fatto, ma con forte dolore.

E poi naturalmente restai in contatto con Susanna, la moglie tanto amata. E così venni a sapere della curiosa e intrigante storia che lega Ennio a Sergio, la matematica alla musica: Ennio, famoso creatore di giochi matematici; Sergio, famoso musicista, direttore e compositore. Il primo con il sogno di saper cantare; il secondo curioso matematico dilettante, innamorato dei numeri primi. Il sogno del primo: arrivare a cantare bene, suonando a tempo; sogno del secondo: far conoscere al mondo della matematica le sue riflessioni personali sui numeri primi, una parte delle quali era stata pubblicata sulla rivista online dell'Università Bocconi di Milano.

Un formidabile e ben noto creatore di giochi matematici con un sogno nel cassetto; un ben noto direttore e compositore musicale con un altro sogno nel cassetto...

Susanna ha rintracciato le carte di Ennio relative a questa storia e ha concordato con Sergio come portare avanti il lavoro che l'editore Dedalo ha poi accolto. Nasce così questo curioso testo, *L'armonia dei numeri primi*, titolo nel quale la parola “armonia” ha un significato assai più profondo e ambivalente del solito...

Il libro consta di due parti: la prima sono appunti di Ennio sui numeri primi intesi soprattutto come curiosità aritmetica e come elementi didattici, oggetti ludici; la seconda sono appunti di Sergio su sue riflessioni aritmetiche sui numeri primi.

Nella parte scritta da Ennio troviamo molte riflessioni su temi aritmetici, alcuni dei quali ben noti, altri mica tanto: primi gemelli, cugini, sexi, additivi, circolari, bifronti, palindromi, permutabili, pluriunitari, troncabili; i numeri primi di Sophie Germain, di Mersenne. E poi vari teoremi e congetture: di Goldbach, di Gilbreath. E varie proprietà, alcune delle quali mi erano note e



altre no. E poi c'è la specialità di Ennio, "Giochi con i numeri primi", spesso assai divertenti e tali da stuzzicare l'interesse: metaprimi (ispirati a Lewis Carroll), crucigrammi con numeri primi, vari giochi di magia con i numeri primi, giochi ispirati a Fermat, ai Maya e così via.

Molti di questi giochi sono adatti per stimolare la curiosità dei giovani studenti, spingendoli a riflettere giocando, il che era nello spirito ludico di Ennio, lo è sempre stato. Si ritrova la sua arguzia, la sua fantasia, il suo umore che ci hanno accompagnato per decenni. (Troppo pochi).

Nella seconda parte, quella di Sergio, appaiono vari capitoli ciascuno dei quali riguarda una tematica; aspetti estetici dei numeri primi, sfiorando in qualche caso la numerologia e varie sue curiosità legate ai primi; un capitolo intero basato sui giochi che hanno come protagonisti numeri primi; un dialogo di ispirazione platonica che dibatte vari temi filosofici legati ai numeri primi. Tutto ciò include anche riflessioni matematiche sul tema, riflessioni che hanno come protagonista Sergio, il quale approfitta di questa occasione per indurre qualche matematico professionista, esperto di questi contenuti, a riconoscere le sue analisi e vedere se possono essere accettate come proprietà assai particolari di diverse categorie di numeri primi.

L'occasione, per quanto mi riguarda, è soprattutto quella di offrire un omaggio pubblico al caro amico scomparso, Ennio, al quale mi legano varie avventure culturali creative. Sapere che uno dei suoi ultimi studi abbia in questo modo potuto essere reso pubblico mi commuove e so che ha dato molta felicità a Susanna portarlo a compimento. Un gesto d'amore senza pari.

E trovo divertente, in senso positivo e originale, questo dualismo di sogni, musicale da parte di un matematico giocolo e aritmetico da parte di un musicista professionista.

Come a confermare che queste due discipline hanno davvero qualcosa in comune, attraente ed eterno.

D'Amore, B. (2024). *Arte, Matematica, Futurismo: Un Racconto tra Scienza e Pittura da Giacomo Balla a Oggi*. Pendragon.

Prefazione di Piergiorgio Odifreddi

Da diversi anni Bruno D'Amore, matematico, dedica molti suoi studi all'arte figurativa, tanto da sostenere nel 1977 l'esame di ammissione all'AICA (Association International des Critiques d'Arte) come critico d'arte. Ricordo il suo libro *Arte e Matematica* che io stesso commentai con una pagina su Repubblica nel 2015. Proprio in questo anno 2024 sono usciti due suoi volumi in una collana da me diretta dedicati all'arte di Raffaello e di Mondrian. Sulla scelta di questi autori, io stesso ho avuto un ruolo...

La linea analitica di D'Amore è sempre la stessa: presentare brevemente gli aspetti artistico - estetici che caratterizzano gli autori, ma poi entrare in dettagli (anche tecnici) sulla matematica che, a volte, è esplicitamente usata consapevolmente da essi, altre volte è invece come nascosta e implicita, ma sempre dominante qualora si voglia proporre dell'autore in questione una lettura interpretativa completa, non banale, profonda (che, spesso, sfugge ai più).

La scelta di Giacomo Balla, per questo volume, mi attrae molto dato che io stesso mi sono cimentato in analisi non tanto estetiche ma matematiche delle sue opere. Per esempio, ho in passato analizzato le difficoltà implicite nel voler rappresentare pittoricamente il movimento su un'unica tela, come cercarono di fare vari esponenti del futurismo, ad esempio nel *Dinamismo di un cane al guinzaglio* di Giacomo Balla, del 1912, o nel *Dinamismo di un ciclista* di Umberto Boccioni, del 1913. Le loro soluzioni richiamano, inconsciamente, quelle dell'arte orientale: in particolare, le raffigurazioni delle divinità Avalokiteshvara e Shiva a molte braccia. E, consciamente, le prime cronofotografie a esposizione multipla: in particolare, la famosa serie di istantanee di Eadweard Muybridge, che nel 1878 mostrarono come un cavallo al galoppo si solleva completamente da terra.

Le espressioni più significative del genere furono ottenute contemporaneamente, nel 1912, da Kazimir Malevic con *L'arrotino* e da Marcel Duchamp col *Nudo che scende le scale*, sempre nel 1912. Nelle parole dello stesso Duchamp, quest'ultima opera è «un dipinto improprio, un'organizzazione di elementi cinetici, un'espressione del tempo e dello spazio attraverso la rappresentazione astratta del movimento».

Per concentrarsi su questo obiettivo, la figura umana viene ridotta a un manichino con i colori del legno. E, per raggiungere lo scopo, il dinamismo



viene congelato in una sovrainpressione di istantanee che trasforma il quadro in una sequenza cinematografica o in una fotografia sovraesposta, come quella che la rivista «Life» scattò all'artista stesso quarant'anni dopo, nel 1952, intitolandola appropriatamente *Duchamp che scende le scale*.

D'Amore evidenzia con netta precisione le frasi che soprattutto Balla ma che anche altri futuristi usano per fare riferimento alla matematica, ma lo fa con competenza. Più di uno storico dell'arte mette in rilievo l' "ispirazione matematica" dell'opera di Balla nella sua lunga militanza futurista, cadendo però nell'errore di accettare le frasi dell'artista come fossero pronunciate da uno scienziato. D'Amore invece mostra come si tratti invece di una matematica intesa non come teoria scientifica, ma come ricerca di un ordine razionale, di un'organizzazione formale, della perfezione; si tratta dunque di un modo di interpretare la matematica un po' ingenuo, visto oggi, ma significativo se si pensa alla sua evoluzione, non proprio specifica nel mondo dell'arte, e in quel periodo.

Usando frasi dello stesso D'Amore, è chiaro che si tratta di artisti, poeti e pittori, poco competenti nella matematica come disciplina scientifica, che vogliono far colpo sul pubblico con roboante terminologia pseudoscientifica. Suggestiscono per esempio una matematica che "si basa sull'essenza divina del caso e dell'azzardo", proponendo che alla vita sociale si debba/possa applicare il calcolo delle probabilità, come fosse una novità, azzardata e lungimirante. E suggeriscono agli architetti costruttori di nuove città di usare la "geometria poetica" che viene contrapposta a una "matematica quantitativa", allo scopo di spingere "la Terra fuori della sua orbita" scegliendo come riferimento la Luna al posto del Sole, definito "mediocre stella".

Per interpretare correttamente la presenza matematica nelle opere di questi artisti, D'Amore introduce vari argomenti di matematica davvero profonda, non banalmente scolastica, il che aiuta molto nell'interpretazione delle opere, al di là di quel che gli stessi Autori avevano previsto.

E poi mi sorprende, assumendo il lavoro di Balla e dei tanti altri artisti suoi contemporanei chiamati in causa, per mostrare come la loro lezione, sia in modalità didascalica sia in modalità espressiva, sia stata l'avvio di una tendenza più vicina ai nostri tempi, nella scelta di tematiche specifiche della realizzazione di opere d'arte più moderne o temi di analisi forti. Tanto per fare un esempio semplice, il meno tecnico, Balla decide di realizzare opere dipingendo sulla tela semplici cifre numeriche e chiamandole, per esempio, "Numeri innamorati" (1923); alcuni decenni dopo, appaiono decine di artisti che mostrano di aver appreso la lezione, realizzando opere che seguono la stessa strada, per esempio Robert Indiana (1963), Jasper Johns (1976), Ugo Nespolo (1980), ... E questo vale non solo per le cifre, ma per atteggiamenti geometrici, arrivando a citare Dalí, per esempio: costruzioni prospettiche che chiamano in causa la quarta dimensione, rappresentazioni di movimento, ..., tutti temi che D'Amore illustra in modo molto profondo anche matematico, e con decine di esempi che

stupiscono per l'evidenza che però andava mostrata, per poter essere riconosciuta come base analitica.

Tutto questo nel compiere un altro tratto del percorso che D'Amore persegue da decenni e che contrasta con il pensiero di molti, cioè che la cultura è unica, che non esistono le tanto declamate "due culture", che servono solo a cercare di nascondere l'ignoranza di chi ne possiede una sola.